VẤN ĐỀ 3.5. BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài tập về phương pháp quy nạp

1. Chứng minh rằng $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, ta luôn có:

a) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

b) $1+3+6+10+...+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

2. Chứng minh rằng $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, ta luôn có:

a) $3^{n-1} > n(n+2), \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ b) $2^{n-3} > 3n-1, \forall n \geq 8, n \in \mathbb{N}$

Bài tập về dãy số

3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+2}{n+1}$. Tìm các giá trị của a để:

a) Dãy số (u_n) là dãy số tăng b) Dãy số (u_n) là dãy số giảm

ĐS: $H = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow (a_n)$ tăng $\Leftrightarrow a > 2$; (a_n) giảm $\Leftrightarrow a < 2$

- Phương pháp tìm công thức truy hồi khi biết số hạng tổng quát của dãy số:

Bước 1: Tìm u_1.

Bước 2: Tính u_{n+1} rồi tính $u_{n+1} - u_n$ (hoặc $u_{n+1} + u_n$)

4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$ trong đó $0 < a < 1, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

a) Tìm công thức truy hồi của dãy b) Xét tính đơn điệu của dãy

ĐS: a) $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n + a(1+a)^n - a(1-a)^n, \forall n \geq 1$, b) (u_n) tăng

- Dãy số (u_n) gọi là dãy Fibonacci nếu $u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \geq 1$.

5. * Gọi a, b với $a > b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n), n \geq 1$ là dãy Fibonacci.

Bài tập về cấp số cộng

6. Viết 6 số xen giữa hai số 3 và 24 để được một cấp số cộng có 8 số hạng. Tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng này. ĐS: $d = 3, S_n = \frac{3(1+n)n}{2}$

baigiangtoanhoc.com

7. Cho cấp số cộng (a_n) biết rằng $u_1+u_2+u_3=27$ và $u_1^2+u_2^2+u_3^2=275$. Tìm số hạng tổng quát của (a_n). ĐS: $u_n=1+4n$

8. Cho cấp số cộng (a_n) có $S_k=a_1+a_2+...+a_k$. Chứng minh rằng nếu $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ thì $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

9. * Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

HD: Làm theo hai bước.

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bước 2: Tìm điều kiện của m để 4 nghiệm ở bước 1 lập thành cấp số cộng. ĐS: $m=5$ hoặc $m=-\frac{25}{19}$

10. Gọi a, b, c theo thứ tự là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu a, b, c lập thành cấp số cộng thì ta có:

a) $B\le 60^0$ b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

Bài tập về cấp số nhân

11. Viết 6 số xen giữa hai số -2 và 256 để được một cấp số nhân có 8 số hạng. Tính tổng n số hạng đầu của cấp số nhân này. ĐS: $q=-2, S_n=\frac{-2-(-2)^{n+1}}{3}$

12. Cho cấp số nhân (a_n) biết rằng $u_1+u_2+u_3+u_4=15$ và $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85$. Tìm số hạng tổng quát của (a_n).

ĐS: $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0\Rightarrow q=2, a_1=1$ hoặc $q=\frac{1}{2}, a_1=8$

13. * Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $u_1=a, a\ne 0$ và $u_{n+1}=\frac{12}{u_n}, \forall n\ge 1$. Tìm a để dãy số (a_n) là một cấp số nhân. ĐS: $a=\pm 2\sqrt{3}, q=1$

Bài tập tổng hợp

14. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy số tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau, còn tỷ số giữa các số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\frac{9}{5}$. Tìm cấp số cộng và cấp số nhân.

baigiangtoanhoc.com

ĐS: Cấp số cộng là 3, 9, 15. Cấp số nhân là 3, 9, 27.

15. * Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành một cấp số nhân. Tìm bốn số đó biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. ĐS: 12, 16, 20, 25

16. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} 3\sqrt{3}u_2 + u_5 = 0 \\ u_3^2 + u_6^2 = 63. \end{cases}$ Tính tổng $S = |u_1| + |u_2| + ... + |u_{2008}|$.

17. CMR trong tam giác ABC nếu cotgA, cotgB, cotgC theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng tạo thành cấp số cộng.

18. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 2; u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \end{cases}$ với n = 2, 3, …

Xác định u_n và tính tổng $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

baigiangtoanhoc.com